DS n°3 : Applications, fonctions, intégration

Durée : 4 heures. Calculatrices non autorisées.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Toute affirmation non triviale doit être justifiée.

Exercice

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Calculer $I = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$.

2) En utilisant le changement de variable $x = \tan t$, calculer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$

3) Soient $a, b \in]-1, 1[$. Trouver une fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\int_a^b \arcsin x dx = [F(x)]_a^b$$

En déduire les primitives de arcsin sur $[a, b]$.

4) On définit l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.

Problème 1

On considère les fonctions

$$f : x \mapsto \frac{1}{2} \arctan(\mathrm{sh}(x)) \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1 + \mathrm{ch}(x)}\right).$$

On va montrer que $f = g$ de deux manières différentes.

1)

a) Déterminer le domaine de définition D de f et g.

b) Montrer que f et g sont dérivables sur D. Calculer f' et g'.

c) En déduire le résultat voulu.

Tournez la page S.V.P.

2)

a) Rappeler le domaine de définition E de la fonction tan.

b) Montrer que : $\forall x \in D \quad 2f(x) \in E$. Pour x dans D, calculer $\tan(2f(x))$.

c) Montrer que la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)}$ est à valeurs dans $]-1,1[$.

d) Montrer que : $\forall x \in D \quad 2g(x) \in E$. Pour x dans D, calculer $\tan(2g(x))$.

e) En déduire le résultat voulu.

3) Application :

a) Calculer $\operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{2}\ln(3)\right)$.

b) En appliquant l'égalité $f(x) = g(x)$ en $x = \dfrac{1}{2}\ln(3)$, calculer $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Problème 2

1) Soit $\preceq$ une relation binaire sur un ensemble E. Rappeler la définition de "$\preceq$ est une relation d'ordre sur E".

2) Soit $(E,\preceq)$ un ensemble ordonné. Soit $f : E \to E$ une application et $\lhd$ la relation binaire sur E définie par

$$\forall x,y \in E \qquad x \lhd y \iff f(x) \preceq f(y)$$

a) Démontrer que $\lhd$ est réflexive et transitive.

b) Démontrer que $\lhd$ est une relation d'ordre si et seulement si f est injective.

c) Rappeler la définition de "$\preceq$ définit un ordre total".

d) On suppose f bijective. Démontrer que $\lhd$ définit un ordre total si et seulement si $\preceq$ définit un ordre total.

3) Rappel : on définit sur $\mathbb{N}^*$ la relation de divisibilité $|$ par

$$\forall m,n \in \mathbb{N}^* \qquad m|n \iff \exists k \in \mathbb{N}^* \quad n = km$$

a) Montrer que $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.

b) Est-ce que $|$ définit un ordre total ?

Soit $(E,\preceq)$ un ensemble ordonné. Soit $\leqq$ une autre relation d'ordre sur E. On dit que "$\leqq$ est un **prolongement** de $\preceq$ sur E" si

$$\forall x,y \in E \qquad x \preceq y \implies x \leqq y$$

4) Montrer que la relation d'ordre usuelle $\leq$ est un prolongement de $|$ sur $\mathbb{N}^*$.

Rappel : on définit sur $\mathbb{N}$ la relation de divisibilité $|$ par

$$\forall m,n \in \mathbb{N} \qquad m|n \iff \exists k \in \mathbb{N} \quad n = km$$

On admettra que $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

5) Est-ce que la relation d'ordre usuelle $\leq$ est un prolongement de $|$ sur $\mathbb{N}$?